DLAのフラクタル次元の理論(拡散に支配された凝集(DLA)とそれに関連した現象,研究会報告)

本田, 勝也

この時，衝撃波は完全には粒子系と同一視できないが，単純化したのが我々のモデルと看做せる。

巾分布は非常に特徴的な分布である。サイズの大きい所で巾分布に従えば，モーメントの発散を意味するから臨界現象と関係が深い。有限時間で二次のモーメントが発散すれば，パーコレーション転移を意味するが，この系でも漸近的に巾分布になることは興味深い[4]。一方，このモデルでのクラスターの数を一定に保つと云う条件も非常に興味深い。実際，逆に種からの成長をケーリートゥリー上で考えた時に，各時間の二対生成と消滅確率が等しい時，即ち粒子の数期待値が一定の時にサイズ分布は巾分布に従い，パーコレーション転移を示すからである。この条件の一般化が課題である。

他に理論的扱いについても説明した。時間を逆に見てカスケード過程と考えた時，可成り良い一致を見たが，対応は完全ではなく，成功しているとは言えない。

参 考 文 献

1) Vicsek, Meakin and Family, Phys. Rev. **A32**, 1122 (1985).
こういう状況はエアロゾル化学ではよく考えられていることを研究会後に知った。

2) Takayasu and Nishikawa, 1st Proc. of "*Science on Form*" (1986) Tsukuba.

3) Kida and Sugihara, J. Phys. Soc. Jpn. **50**, 1785 (1981).

4) W. H. White, Proc. Am. Math. Soc. **80**, 273 (1980)
この論文で，広義のDLAでは有限時間で相転移がないことが示されている。

DLAのフラクタル次元の理論

名大・工　本 田 勝 也

ランダムなフラクタルパターンの典型例として，DLAに関する研究は急速に発展してきたが，それは主に計算機シミュレーションと実験を手段とするもので解析的理論はまだ乏しい。ここでは，DLAクラスターのフラクタル次元Dを理論的に求めた主な理論を簡単に紹介する。

1）因果律関係[1)2)]

分子場的議論によって求められるクラスターの成長速度が，先端部分に流れ込む拡散粒子の密度より小さいという条件から，フラクタル次元の上限と下限が

$$d - d_w + 1 \leq D \leq d \tag{1}$$

と導かれる。ここで d はクラスターが成長する空間次元，d_w は拡散粒子の軌跡によって作られる空間の次元を表わす。ブラウン粒子の場合は $d_w = 2$ であり，直線状の軌跡の場合は $d_w = 1$ である。後者の場合，コンパクトな $D = d$ のクラスターが形成されることが上記不等式から導かれる。

2）高分子理論の援用 [3)4)]

高分子鎖の両端間距離とモノマー数の関係は，モノマー間の排除体積効果とエントロピーとの競合によって決められる。DLAにおいても，外側に伸びた枝による遮蔽効果と，拡散粒子がクラスターの奥に侵入して内部を埋めようとする相反する傾向が均り合って自己相似なパターンを形成する。このことに着目して $d_w = 2$ の場合に対して，簡潔で美しい表式

$$D = (d^2 + 1) / (d + 1) \tag{2}$$

が導かれた [3)]。

3）クラスターの輪郭の成長 [5)6)]

クラスターの内部構造を無視すると，電磁気学に習って拡散場 $u(\boldsymbol{r})$ を解き，付着確率 $P_g \propto |\nabla u(\boldsymbol{r})|$ を求めることができる。例えば，角度 α のくさびの頂点付近では

$$P_g(\delta r) \sim (\delta r)^{(\alpha-\pi)/(2\pi-\alpha)} \tag{3}$$

の異常性を示す。この方法では，自動的にフラクタル次元を求めることができないが，P_g の異常性に合わせて，下地となる格子の異方性を反映することからその後の研究の発展に強い示唆を与えた [7)]。

4）次元解析の方法

内部に侵入した拡散粒子がクラスターの自己相似性を完成することに着目した議論を展開する。N 粒子からなるクラスターに ΔN 個の粒子が付け加わった場合，半径 r の殻内粒子の増加分は $\Delta\rho(r) \sim r^{D-1}$ である。一方，$\Delta\rho(r)$ は浸透長さ $l(r) \sim r^{(d-D)/(d_w-1)}$ を用いて $\{l(r)\}^d$ に比例する。両者の指数を一致させ，

$$D = (d^2 + d_w - 1) / (d + d_w - 1) \tag{4}$$

が得られる[8]。$d_w=2$ の場合は(2)式と一致する。この方法は，付着確率を $P_g \propto |\nabla u|^{\eta}$ とするNPW モデルにも拡張できて

$$D_\eta = \{d^2 + \eta(d_w - 1)\} / \{d + \eta(d_w - 1)\} \tag{5}$$

が与えられ[9]，イーデンモデル（$\eta=0$）との内挿式になる。さらに，BJモデルにも適用され

$$D_{\mathrm{BJ}} = \{d^2 + 2(d_w - 1)\} / \{d + 2(d_w - 1)\} \tag{6}$$

が得られている[10]。

5）まとめ

以上，簡単な紹介しかできなかったが，詳しい内容についてはそれぞれの文献を参照していただきたい。

いずれにせよ，最近の計算機シミュレーションの成果[7]（異方的な成長，muti-fractal 構造など）を説明する理論はまだ提案されていない。今後，理論家の演ずべき役回りはまだまだ多い。

文　献

1) R. C. Ball and T. A. Witten, Phys. Rev. **A29** (1984) 2966.
2) F. Leyvraz, J. Phys. **A18** (1985) L941.
3) M. Tokuyama and K. Kawasaki, Phys. Lett. **100A** (1984) 337.
4) H. G. E. Hentschel, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 212.
5) L. A. Turkevich and H. Scher, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 1026.
6) R. C. Ball, R. M. Brady, G. Rossi and B. R. Thompson, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 1406.
7) 本研究会　近藤　宏，早川美徳　両報告参照。
8) K. Honda, H. Toyoki and M. Matsushita, J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 707.
9) M. Matsuhita, K. Honda, H. Toyoki, Y. Hayakawa and H. Kondo, J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 2618.
10) K. Honda, H. Toyoki and M. Matsushita, preprint.